

考虑摩擦的多间隙直齿弯扭振动建模和分岔特性

盛冬平, 朱如鹏, 靳广虎, 陆凤霞, 鲍和云

(南京航空航天大学 机电学院, 南京 210016)

摘 要: 采用集中质量法, 建立了齿轮-转子-轴承系统的六自由度的多间隙弯扭耦合的非线性振动模型, 模型中考虑了齿面摩擦、时变啮合刚度、齿侧间隙和支承间隙等因素. 根据系统在转速、齿侧间隙、齿面摩擦以及啮合阻尼等参数下的全局分岔图和 Poincare 截面图, 研究了各参数对系统分岔特性的影响. 分析可知: 在一定的齿侧间隙、啮合阻尼和低齿面摩擦因数下, 随着转速的逐渐增加, 系统通过拟周期分岔进入混沌. 当齿面摩擦因数逐渐增加时, 系统由良好润滑状态进入干摩擦, 系统的混沌运动区域也因此在一临界点产生裂变, 且通过激变的途径二次进入混沌; 在一定的转速、啮合阻尼和齿面摩擦因数下, 随着齿侧间隙的增加, 系统通过激变进入混沌, 同时可以发现, 系统产生混沌和分岔主要发生在量纲一齿侧间隙小于 3 和大于 7 的区域, 且最终通过倒分岔锁相为周期 1 运动; 在一定的转速、啮合阻尼和齿侧间隙的条件下, 随着齿面摩擦因数的增加, 系统通过激变进入混沌. 同时发现, 随着啮合阻尼的增加, 混沌区域逐渐裂变成 2 个、3 个和 4 个混沌窗口, 但最终都经由拟周期锁相为周期 1 运动.

关 键 词: 弯扭耦合; 分岔; 多间隙; 摩擦; 混沌; 非线性

中图分类号: V232; TH113

文献标志码: A

Bifurcation characteristic and modeling of transverse-torsional spur gear vibration considering friction and multiple clearances

SHENG Dong-ping, ZHU Ru-peng, JIN Guang-hu, LU Feng-xia, BAO He-yun

(College of Mechanical and Electrical Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: Using the mass centralized method, a six degree of freedom transverse-torsional coupled nonlinear gear-rotor-bearing vibration model with multiple clearances and tooth surface friction was established, while time-varying meshing stiffness, gear backlashes, bearing clearances were considered in the model as well. By studying Poincare maps and global bifurcation diagrams under above parameters, the bifurcation characteristics of the system were obtained. Under a certain gear backlash, meshing damp and low tooth surface meshing friction, the system enters into a chaos state by the way of quasi-periodic motion with the increase of the rotation rate. While the tooth surface meshing friction coefficient increases, namely system is changed from well lubricated state to dry lubrication, the window of the chaos motion is split into two pieces at a critical point, and the system motion enters into a chaos state again by the way of crisis; Under a certain rotation speed, meshing damp and tooth surface friction coefficient, the system enters into a chaos state by way of crisis with the increase of the gear backlash, and the bifurcation and chaos motion happens when dimensionless gear backlash is less than 3 or bigger than 7, and the system motion is locked into a period motion by channel of reverse bifurcation; Under a certain rotation rate, meshing damp and gear backlash, the system enters into a chaos state by the way of crisis with the increase of the tooth sur-

收稿日期: 2013-10-09

基金项目: 国家自然科学基金(51375226); 江苏省高校优秀学科建设工程资助(PAPD);

江苏省研究生创新基金(CXZZ11_0199); 中央高校基本科研业务费专项资金资助(NZ2013303, NZ2014201)

作者简介: 盛冬平(1981—), 男, 江苏南京人, 博士生, 主要从事直升机动系统动力学和非线性的研究.

face friction coefficient. Meanwhile, it could be observed that, with the increase of the meshing damp, the window of the chaotic motion is split into 2, 3 and 4 sub-windows subsequently. But at last, system always is locked into a period motion by channel of quasi-periodic motion.

Key words: transverse-torsional coupled; bifurcation; multiple clearances; friction; chaos; nonlinear

近年来,国内外学者以非线性振动理论为基础,以齿轮啮合过程中的时变啮合刚度和齿侧间隙等非线性因素为参数,对齿轮传动系统的非线性振动进行了广泛的研究^[1-3].最新的研究表明,齿面摩擦也是齿轮非线性振动的重要影响因素之一.由于齿面摩擦、齿侧间隙以及时变啮合刚度等因素的存在,导致齿轮传动系统成为一个复杂的强非线性动力系统. Vaishya 等^[4-6]较早建立了考虑齿面摩擦的单自由度的动力学模型,模型中将时变啮合刚度简化为矩形波,影响了齿间载荷分布、齿面摩擦力. Velez 等^[7]基于库仑齿面摩擦模型研究了低速重载时齿面摩擦对齿轮系统的振动有重要影响. He 等^[8]研究了在实测刚度影响下齿面摩擦对系统动力学的影响.国内很多学者也研究了齿面摩擦对齿轮传动的动力学特性,其中王三民等^[9]研究了在单自由度下含齿面摩擦和齿侧间隙的直齿轮副的分岔和混沌特性,包括在一定的参数下,齿面摩擦能使混沌吸引子转变为周期吸引子,同时可以使系统提前进入混沌.张靖等^[10]分析了六自由度齿轮系统的动态啮合力、齿面摩擦力以及传动误差.卫一多等^[11]分析了齿面摩擦对齿轮系统非线性振动及稳定性的影响.然而,根据目前公开发表的相关文献资料,考虑齿面摩擦,齿侧间隙和支承间隙在内的弯扭耦合非线性齿轮振动系统在转速、啮合阻尼和齿面摩擦因数等参数下的分岔及混沌特性的研究尚少见.

本文以圆柱直齿齿轮传动系统为研究对象,综合齿轮传动系统中啮合副的时变齿面摩擦力臂和支承间隙等因素,建立了考虑齿面摩擦在内的圆柱直齿齿轮传动的振动模型,利用 Runge-Kutta法求解带有强非线性的量纲一振动控制方程,并研究了该振动系统随转速、齿面摩擦因数、齿侧间隙以及啮合阻尼等参数的变化而呈现的分岔和混沌特性,同时还分析了在该特性下的实际应用.

1 考虑齿面摩擦的多间隙弯扭耦合振动模型

系统的弯扭耦合振动模型如图1所示,可以

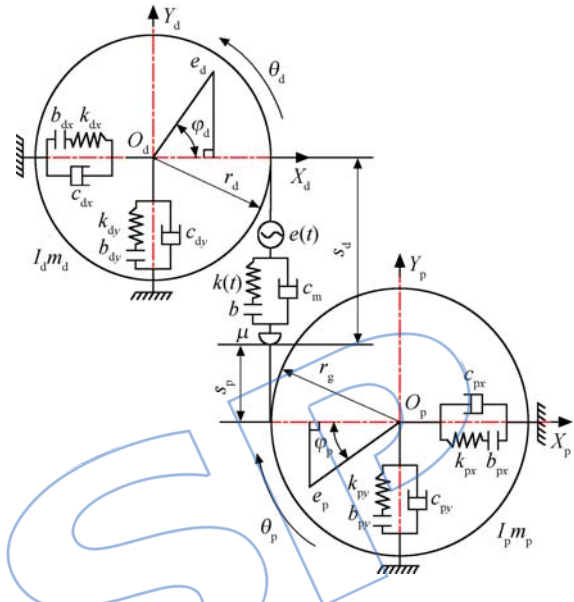


图1 考虑齿面摩擦的多间隙弯扭耦合振动模型

Fig. 1 Transverse-torsional coupled gear vibration model with multiple clearances and tooth surface friction

看出该系统具有六个自由度,可用坐标向量 $[\theta_d, X_d, Y_d, \theta_p, X_p, Y_p]^T$ 来表示.其中 θ_d, X_d, Y_d 分别为主动轮的转动角度,横向位移和纵向位移. θ_p, X_p 和 Y_p 分别为从动轮的转动角度,横向位移和纵向位移.

为了有效分析该系统在各参数下的分岔和混沌特性,进行如下定义:

1) 系统中各齿轮均为圆柱直齿,不考虑轮齿的变位和修形等因素.主动轮和从动轮的基圆半径分别用 r_d 和 r_p 表示.

2) 考虑到系统的时变啮合刚度可简化为周期矩形波,并且可以展开成以啮合频率为基频的傅里叶级数,取1次谐波项后获得的时变啮合刚度参数如下:

$$k(t) = k_m + k_a \sin(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

式中 k_m 为啮合线上的平均啮合刚度, k_a 为啮合刚度变化幅值.

3) 考虑系统的齿侧间隙,支承间隙,啮合阻尼,支承阻尼以及支承刚度.其中半齿侧间隙用 b 表示,主动轮和从动轮在 x 和 y 方向上的半支承间隙分别用 d_{dx}, d_{dy}, d_{px} 和 d_{py} 表示.啮合线上的

啮合阻尼用 c_m 表示. 主动轮和从动轮在 x 和 y 方向上的支承阻尼分别用 c_{dx} , c_{dy} , c_{px} 和 c_{py} 表示, 其支承刚度分别用 k_{dx} , k_{dy} , k_{px} 和 k_{py} 表示.

4) 考虑系统的齿面摩擦因素的影响, 包括齿面摩擦因数 μ 、主动轮和从动轮的时变齿面摩擦力臂 s_d 和 s_p .

5) 考虑主动轮和从动轮的几何偏心误差的影响, 其偏心值和初相位分别用 e_d , e_p , φ_d 和 φ_p 表示.

1.1 间隙非线性函数和动态啮合力

外啮合的齿轮传动在啮合线上的综合传递误差 $e(t)$ [12,20-21] 由主动轮和从动轮的静态误差以及偏心误差在啮合线上的投影组成, 可表示为

$$e(t) = e \cos \omega t + e_d \cos(\omega_d t + \varphi_d) + e_p \cos(\omega_p t + \varphi_p) \quad (2)$$

式中 ω_d 和 ω_p 分别为主动轮和从动轮偏心误差转动的角速度.

主动轮和从动轮在啮合线上和坐标轴方向上的非线性齿侧间隙和支承间隙函数可以表示为

$$f(X, b) = \begin{cases} X - b & X > b \\ 0 & |X| \leq b \\ X + b & X < -b \end{cases}$$

$$f_{di}(K_d, b_{di}) = \begin{cases} K_d - b_{di} & K_d > b_{di} \\ 0 & |K_d| \leq b_{di} \\ K_d + b_{di} & K_d < -b_{di} \end{cases} \quad (3)$$

$$f_{pi}(K_p, b_{pi}) = \begin{cases} K_p - b_{pi} & K_p > b_{pi} \\ 0 & |K_p| \leq b_{pi} \\ K_p + b_{pi} & K_p < -b_{pi} \end{cases}$$

式中 (K, i) 等于 (X, x) 和 (Y, y) .

齿轮啮合线上的动态啮合力可用下式表示,

$$\begin{cases} \ddot{X} + c_m \left[\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_d} + \frac{1}{m_p} + \lambda \mu \left(\frac{r_d s_d}{I_d} + \frac{r_p s_p}{I_p} \right) \right] \dot{X} + \frac{c_{dy}}{m_d} \dot{Y}_d - \frac{c_{py}}{m_p} \dot{Y}_p + \frac{k_{dy}}{m_d} f_{dy}(Y_d, b_{dy}) - \frac{k_{py}}{m_p} f_{py}(Y_p, b_{py}) + [k_m - k_a \cos(\omega t)] \left[\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_d} + \frac{1}{m_p} + \lambda \mu \left(\frac{r_d s_d}{I_d} + \frac{r_p s_p}{I_p} \right) \right] f(X, b) = \frac{F}{m_e} + e \cos(\omega t + \varphi) + e_d \cos(\omega_d t + \varphi_d) + e_p \cos(\omega_p t + \varphi_p) \\ \ddot{X}_d - \lambda f \frac{c_m}{m_d} \dot{X} + \frac{c_{dx}}{m_d} \dot{X}_d - \frac{\lambda \mu [k_m - k_a \cos(\omega t)]}{m_d} f(X, b) + \frac{k_{dx}}{m_d} f_{dx}(X_d, b_{dx}) = 0 \\ \ddot{Y}_d + \frac{c_m}{m_d} \dot{X} + \frac{c_{dy}}{m_d} \dot{Y}_d + \frac{k_m - k_a \cos(\omega t)}{m_d} f(X, b) + \frac{k_{dy}}{m_d} f_{dy}(Y_d, b_{dy}) = 0 \\ \ddot{X}_p + \lambda f \frac{c_m}{m_p} \dot{X} + \frac{c_{px}}{m_p} \dot{X}_p + \frac{\lambda \mu [k_m - k_a \cos(\omega t)]}{m_d} f(X, b) + \frac{k_{px}}{m_p} f_{px}(X_p, b_{px}) = 0 \\ \ddot{Y}_p - \frac{c_m}{m_p} \dot{X} + \frac{c_{py}}{m_p} \dot{Y}_p - \frac{k_m - k_a \cos(\omega t)}{m_p} f(X, b) + \frac{k_{py}}{m_p} f_{py}(Y_p, b_{py}) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

定义为弹性恢复力与阻尼力之和

$$F_d = k(t) f(X, b) + c_m \dot{X} \quad (4)$$

式中 X 为相对坐标, 啮合阻尼 c_m 可由下式得到:

$$c_m = 2\zeta \sqrt{k_m / (1/m_d + 1/m_p)} \quad (5)$$

式中 ζ 为啮合线上的相对阻尼比, m_d 和 m_p 分别为主动轮和从动轮的质量.

1.2 系统的振动微分方程

1.2.1 系统的振动控制方程

根据以上分析, 系统在动态啮合力 F_d 、时变啮合齿面摩擦力 F_f 、综合传递误差 $e(t)$ 、输入扭矩 T_d 和外载荷 T_p 等内外激励的作用下, 利用牛顿运动定律, 可得到系统的振动控制方程为

$$\begin{cases} m_d \ddot{X}_d + c_{dx} \dot{X}_d + k_{dx} f_{dx}(X_d, b_{dx}) = F_f \\ m_d \ddot{Y}_d + c_{dy} \dot{Y}_d + k_{dy} f_{dy}(Y_d, b_{dy}) = -F_d \\ I_d \ddot{\theta}_d + r_d F_d = T_d - s_d F_f \\ m_p \ddot{X}_p + c_{px} \dot{X}_p + k_{px} f_{px}(X_p, b_{px}) = -F_f \\ m_p \ddot{Y}_p + c_{py} \dot{Y}_p + k_{py} f_{py}(Y_p, b_{py}) = F_d \\ I_p \ddot{\theta}_p + r_p F_d = -T_p - s_p F_f \end{cases} \quad (6)$$

1.2.2 系统在相对坐标下的振动控制方程

由于齿侧间隙和支承间隙会导致式(6)为半正定系统, 从而存在不定解. 为了消除此问题, 必须使系统降维 [12], 同时为了使系统的解具有实际的物理意义, 通过引入相对坐标

$$X = y_d - y_p + Y_d - Y_p - e(t) \quad (7)$$

式中 X 为齿轮在啮合线上的相对位移, 且与 y_d 和 y_p 有相同的非线性特性. 式(6)在引入相对坐标后的方程为

式中 m_e 为主动轮和从动轮在啮合线上的等效质量,且 $m_e = I_d I_p / (I_d R_p^2 + I_p R_d^2)$, $F = T_d / R_d = T_p / R_p$, 其变化频率为 ω / ϵ , ϵ 为系统的重合度, λ 为啮合副间齿面摩擦力的方向系数.

1.2.3 系统的量纲一方程

为了便于使系统的解在一个数值量级上比较和分析,引入量纲一时间 $\tau = \omega_h t$ 和位移标称尺度 b_c , 其中 $\omega_h = \sqrt{k_m / m_e}$. 则系统在啮合线上的量纲一后的位移、速度、加速度和齿侧间隙可分别表示为 $X = \bar{X} b_c$, $\dot{X} = \dot{\bar{X}} b_c \omega_h$, $\ddot{X} = \ddot{\bar{X}} b_c \omega_h^2$, $b = \bar{b} b_c$. 据此, 系统的量纲一后的转速可分别表示为 $\Omega = \omega / \omega_h$, $\Omega_d = \omega_d / \omega_h$, $\Omega_p = \omega_p / \omega_h$.

齿轮振动系统中主动轮和从动轮在啮合线上

和各自坐标系 x 和 y 方向上的量纲一啮合齿侧间隙和支承间隙的非线性间隙函数可表示为

$$f(\bar{X}, \bar{b}) = \begin{cases} \bar{X} - \bar{b} & \bar{X} > \bar{b} \\ 0 & |\bar{X}| \leq \bar{b} \\ \bar{X} + \bar{b} & \bar{X} < -\bar{b} \end{cases}$$

$$f_{di}(\bar{K}_d, \bar{b}_{di}) = \begin{cases} \bar{K}_d - \bar{b}_{di} & \bar{K}_d > \bar{b}_{di} \\ 0 & |\bar{K}_d| \leq \bar{b}_{di} \\ \bar{K}_d + \bar{b}_{di} & \bar{K}_d < -\bar{b}_{di} \end{cases} \quad (9)$$

$$f_{pi}(\bar{K}_p, \bar{b}_{pi}) = \begin{cases} \bar{K}_p - \bar{b}_{pi} & \bar{K}_p > \bar{b}_{pi} \\ 0 & |\bar{K}_p| \leq \bar{b}_{pi} \\ \bar{K}_p + \bar{b}_{pi} & \bar{K}_p < -\bar{b}_{pi} \end{cases}$$

式中 $(\bar{K}, i)$ 等于 $(\bar{X}, x)$ 和 $(\bar{Y}, y)$.

将量纲一后的各子项代入式(8)中, 可得到多间隙弯扭耦合振动系统的量纲一方程为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{X}} \\ \ddot{\bar{X}}_d \\ \ddot{\bar{Y}}_d \\ \ddot{\bar{X}}_p \\ \ddot{\bar{Y}}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_{11} & 0 & \xi_{13} & 0 & \xi_{15} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \xi_{31} & 0 & \xi_{33} & 0 & 0 \\ \xi_{41} & 0 & 0 & \xi_{44} & 0 \\ \xi_{51} & 0 & 0 & 0 & \xi_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{X}} \\ \dot{\bar{X}}_d \\ \dot{\bar{Y}}_d \\ \dot{\bar{X}}_p \\ \dot{\bar{Y}}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} & 0 & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & 0 & 0 & 0 \\ k_{31} & 0 & k_{33} & 0 & 0 \\ k_{41} & 0 & 0 & k_{44} & 0 \\ k_{51} & 0 & 0 & 0 & k_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\bar{X}, \bar{b}) \\ f_{dx}(\bar{X}_d, \bar{b}_{dx}) \\ f_{dy}(\bar{Y}_d, \bar{b}_{dy}) \\ f_{px}(\bar{X}_p, \bar{b}_{px}) \\ f_{py}(\bar{Y}_p, \bar{b}_{py}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中

$$\begin{aligned} \xi_{11} &= c_m \left[\frac{1}{m_e \omega_h} + \frac{1}{m_d \omega_h} + \frac{1}{m_p \omega_h} + \frac{\lambda f}{\omega_h} \left(\frac{r_d \bar{s}_d}{I_d} + \frac{r_p \bar{s}_p}{I_p} \right) \right] & \xi_{13} &= \frac{c_{dy}}{m_d \omega_h} & \xi_{15} &= -\frac{c_{py}}{m_p \omega_h} & \xi_{21} &= -\lambda f \frac{c_m}{m_p \omega_h} \\ \xi_{22} &= \frac{c_{dx}}{m_d \omega_h} & \xi_{31} &= \frac{c_m}{m_d \omega_h} & \xi_{33} &= \frac{c_{dy}}{m_d \omega_h} & \xi_{41} &= \lambda f \frac{c_m}{m_d \omega_h} & \xi_{44} &= \frac{c_{px}}{m_p \omega_h} & \xi_{51} &= -\frac{c_m}{m_p \omega_h} & \xi_{55} &= \frac{c_{py}}{m_p \omega_h} \\ k_{11} &= [k_m - k_a \cos(\Omega \tau)] \left[\frac{1}{m_e \omega_h^2} + \frac{1}{m_d \omega_h^2} + \frac{1}{m_p \omega_h^2} + \frac{\lambda f}{\omega_h^2} \left(\frac{r_d \bar{s}_d}{I_d} + \frac{r_p \bar{s}_p}{I_p} \right) \right] & k_{13} &= \frac{k_{dy}}{m_d \omega_h^2} & k_{15} &= -\frac{k_{py}}{m_p \omega_h^2} \\ k_{21} &= -\frac{\lambda f}{m_d \omega_h^2} [k_m - k_a \cos(\Omega \tau)] & k_{22} &= \frac{k_{dx}}{m_d \omega_h^2} & k_{31} &= \frac{1}{m_d \omega_h^2} [k_m - k_a \cos(\Omega \tau)] & k_{33} &= \frac{k_{dy}}{m_d \omega_h^2} \\ k_{41} &= \frac{\lambda f}{m_d \omega_h^2} [k_m - k_a \cos(\Omega \tau)] & k_{44} &= \frac{k_{px}}{m_p \omega_h^2} & k_{51} &= -\frac{1}{m_p \omega_h^2} [k_m - k_a \cos(\Omega \tau)] & k_{55} &= \frac{k_{py}}{m_p \omega_h^2} \\ \bar{F}_1 &= \frac{F}{b_c m_e \omega_h^2} + \frac{e \omega^2}{b_c \omega_h^2} \cos(\Omega \tau + \varphi) + \frac{e_d \omega_d^2}{b_c \omega_h^2} \cos(\Omega_d \tau + \varphi_d) + \frac{e_p \omega_p^2}{b_c \omega_h^2} \cos(\Omega_p \tau + \varphi_p) \end{aligned}$$

2 系统振动的分岔和混沌特性分析

采用变步长的 4 阶 Runge-Kutta 法求解量纲一方程式(10), 根据其数值解获得了系统在不同分岔参数下的分岔图和 Poincare 截面图, 并据此分析系统的非线性振动特性. 取一组系统的基本

算例参数, 如表 1 所示.

2.1 系统随量纲一转速 Ω 变化的分岔特性

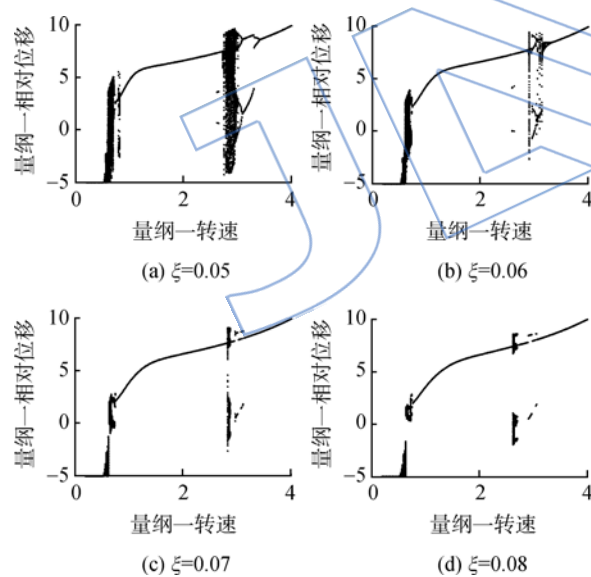
在系统中的量纲一齿侧间隙 $\bar{b} = 4$, 齿面摩擦因数 $\mu = 0.1$ 下, 研究了系统在相对阻尼比 ξ 为 0.05, 0.06, 0.07 和 0.08 下的量纲一相对位移随量纲一转速 Ω 的分岔特性, 如图 2 所示. 同时还

研究了当相对阻尼比等于 0.05 时,系统在齿面摩擦因数分别为 0.01, 0.02, 0.03, 0.04 下的分岔特性. 如图 3 所示.

表 1 系统参数

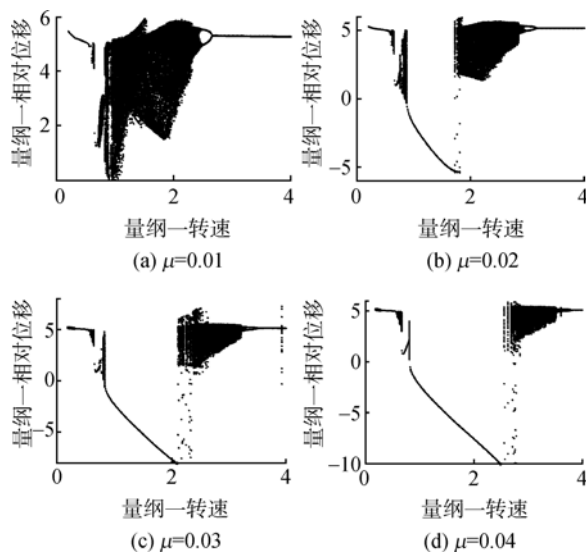
Table 1 System parameters

参数	主动轮	从动轮
模数/mm		3
压力角/(°)		20
输入功率/kW		200
齿宽/mm		40
位移标称尺度 $b_c/\mu\text{m}$		10
齿数	40	80
偏心误差/ μm	10	10
x 方向支承刚度/(GN/m)	0.2	0.35
y 方向支承刚度/(GN/m)	0.2	0.35
x 方向支承间隙/ μm	10	10
y 方向支承间隙/ μm	10	10

图 2 不同相对阻尼比随 Ω 变化的分岔图Fig. 2 Bifurcation diagram with the increase of Ω under different relative damp ratio

由图 2 可以看出,当系统处于低速阶段的周期 1 运动通过激变进入混沌运动后,经历短暂的周期 1 窗口后再次进入混沌,而后通过激变回归为周期 1 运动,然后经过较宽的中等速度下的周期 1 的窗口后再次通过激变进入混沌,最终在高速阶段通过倒分岔锁相为周期 1.

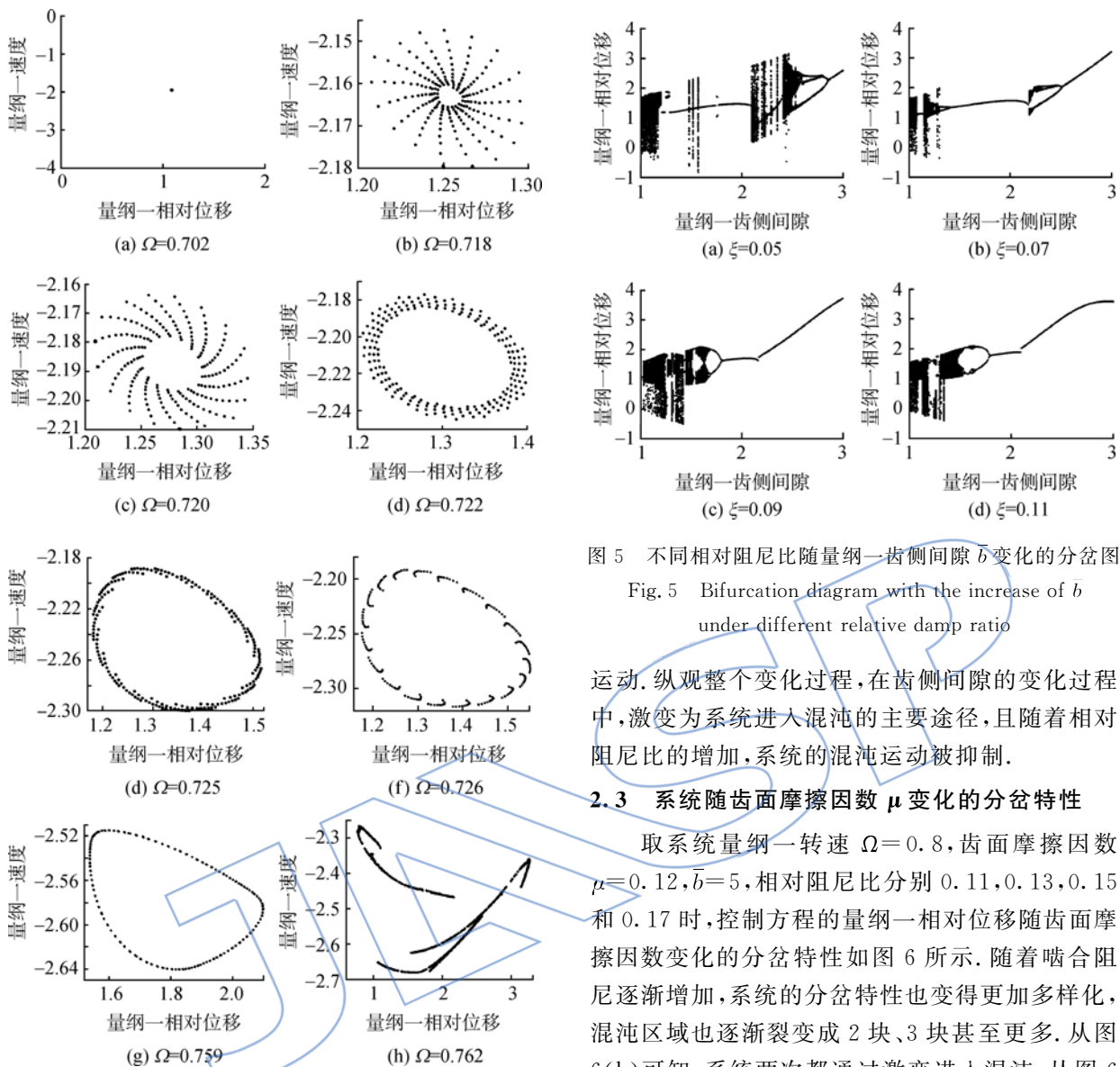
比较图 2(a)~图 2(d)可以发现,随着啮合阻

图 3 不同齿面摩擦因数下随 Ω 变化的分岔图Fig. 3 Bifurcation diagram with the increase of Ω under different tooth surface friction coefficient

尼的增加,系统混沌运动区间宽度逐渐变窄,这本质上是由于啮合阻尼的增长,其耗散的系统的输入能量也在不断增加,进而使系统的运动得以被抑制,表现在混沌运动窗口的宽度的减小.另外可以看出系统两次通过激变进入混沌的临界量纲一转速并未随着啮合阻尼的变化而变化,始终保持在 0.57 和 2.82.

图 3 说明了系统在不同齿面摩擦因数下随量纲一转速变化而呈现出的分岔特性.系统从低速阶段的周期 1 运动通过拟周期道路进入混沌运动后,经历短暂长周期运动窗口后再次进入混沌,而后又通过倒分岔最终回归为周期 1 运动.且随着齿面摩擦因数的增加,系统的混沌窗口宽度逐渐减小,这是由于齿面摩擦因数增长,其消耗的能量也在不断增长,使得系统的运动被抑制,这与系统阻尼的作用类似,且从图 3(b)和图 3(c)可以看出,由于齿面摩擦的存在,使得系统在高速阶段存在时滞现象,且齿面摩擦因数越大,时滞现象越明显.同时从图 3(b)可以看出系统单一的混沌运动窗口随着齿面摩擦因数的增加而产生裂变,而激变成为系统二次进入混沌的途径.

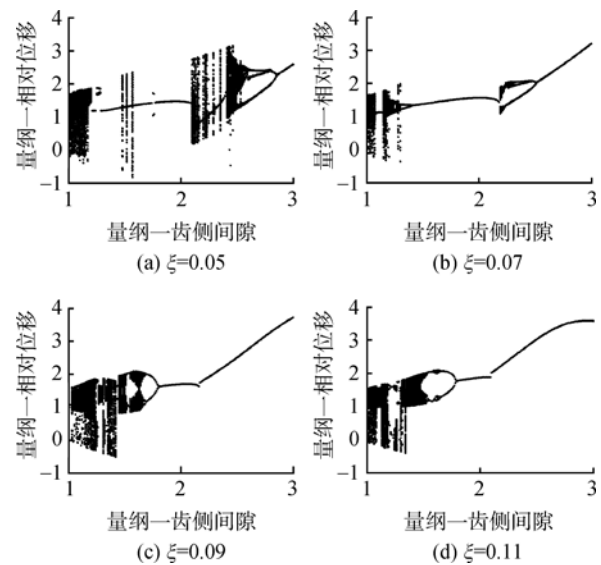
图 4 显示了量纲一齿侧间隙 $\bar{b}=4$, 相对阻尼比为 0.07, 量纲一转速从 0.702 向 0.762 变化时系统由周期 1 运动经过不稳定的混沌吸引子作用后,通过拟周期进入混沌的全过程.图 4(a)显示系统正处于周期 1 的稳定运动中,而图 4(h)中的内部自相似的分形结构说明系统正处于混沌运动状态.图 4(b)~图 4(g)则显示了系统从周期 1 的

图4 不同转速 Ω 下的 Poincaré 图Fig. 4 Poincaré diagram under different rotation rate Ω

稳定运动通过不稳定吸引子的作用后,经由拟周期运动进入混沌运动过程中吸引子所呈现出的6种不同形态,且不稳定吸引域随着分岔参数的增长而不断扩大,最终诱导系统进入混沌。

2.2 系统随量纲一齿侧间隙 $\bar{b}$ 变化的分岔特性

图5是当系统量纲一转速 $\Omega=0.8$,齿面摩擦因数 $\mu=0.06$,相对阻尼比分别为0.05,0.07,0.09和0.11时,方程的量纲一相对位移随系统量纲一齿侧间隙变化的全局分岔图。可以看出系统的混沌和分岔主要发生小齿侧间隙阶段,且系统在反复不断地通过激变的通道进入和退出混沌后,最终通过倒分岔锁相为周期1的稳定运动。当量纲一齿侧间隙继续增加至7之后,系统又会再次通过激变的方式进入混沌,且不再回归周期1

图5 不同相对阻尼比随量纲一齿侧间隙 $\bar{b}$ 变化的分岔图Fig. 5 Bifurcation diagram with the increase of $\bar{b}$ under different relative damp ratio

运动。纵观整个变化过程,在齿侧间隙的变化过程中,激变为系统进入混沌的主要途径,且随着相对阻尼比的增加,系统的混沌运动被抑制。

2.3 系统随齿面摩擦因数 μ 变化的分岔特性

取系统量纲一转速 $\Omega=0.8$,齿面摩擦因数 $\mu=0.12$, $\bar{b}=5$,相对阻尼比分别0.11,0.13,0.15和0.17时,控制方程的量纲一相对位移随齿面摩擦因数变化的分岔特性如图6所示。随着啮合阻尼逐渐增加,系统的分岔特性也变得更加多样化,混沌区域也逐渐裂变成2块、3块甚至更多。从图6(b)可知,系统两次都通过激变进入混沌。从图6(c)可知,系统从周期2的运动通过激变进入混沌后,再次通过拟周期和倒分岔进入稳定的周期1运动,且在混沌带内部多处存在周期3窗口。图6(d)则进一步显示了系统丰富多样的分岔特性,在低齿面摩擦阶段,系统通过激变进入混沌,而后通过拟周期和倒分岔回归周期1运动后,最后经由激变再次进入混沌,在此后的混沌带内存在多处周期2和周期3窗口,最终再次相继通过拟周期和倒分岔锁相为周期1运动。

图7显示了系统量纲一转速 $\Omega=0.8$,相对阻尼比为0.17,齿面摩擦因数从0.170向0.180变化时,系统从混沌运动分岔成3个不变吸引圈后,进入周期3运动,然后再次进入混沌运动的全过程。图7(a)~图7(d)显示了系统在不稳定吸引子的作用下从混沌到周期3运动,最后再次进入混沌而呈现的4种形态,也证明了周期3运动是系

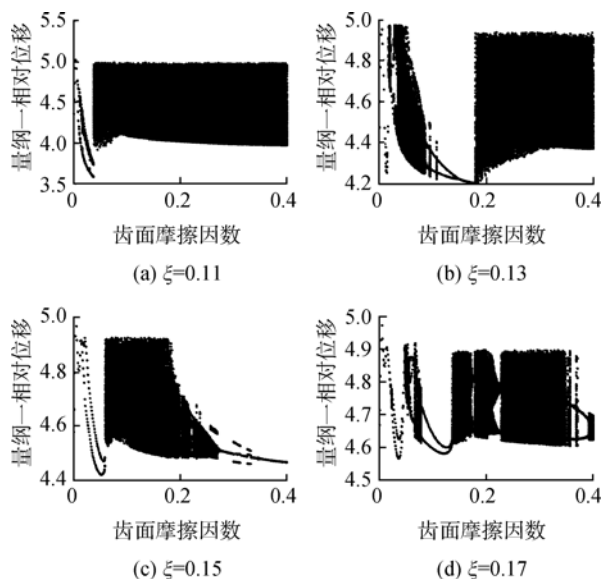
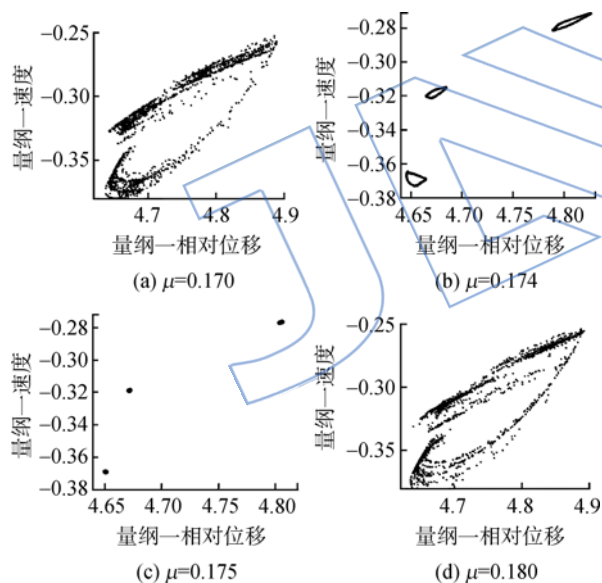
图6 不同相对阻尼比随齿面摩擦因数 μ 变化的分岔图

Fig. 6 Bifurcation diagram with the increase of tooth surface friction coefficient μ under different relative damp ratio

图7 不同齿面摩擦因数 μ 的 Poincaré 图

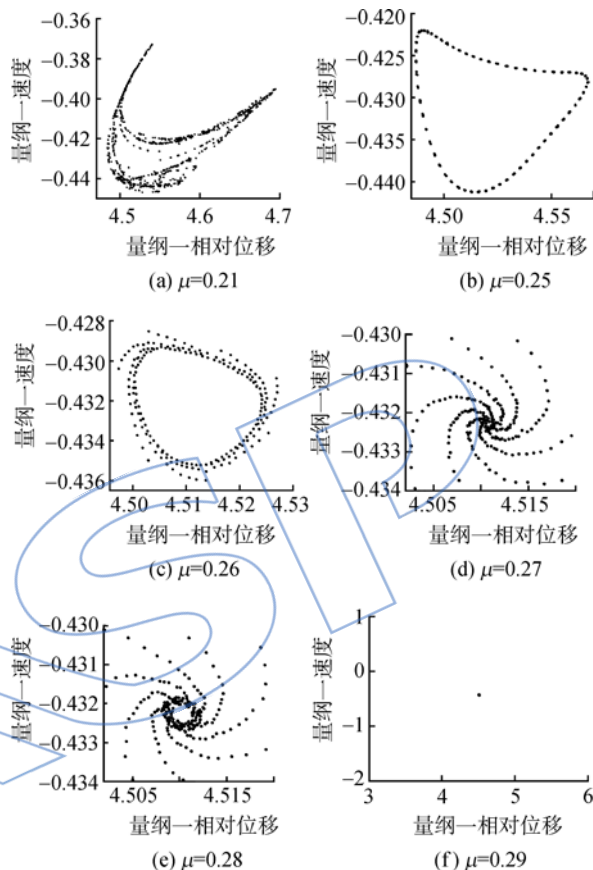
($\Omega=0.8, \xi=0.17$)

Fig. 7 Poincaré diagram under different tooth surface friction coefficient μ ($\Omega=0.8, \xi=0.17$)

统进入混沌的一种途径。

图8则显示了系统量纲一转速 $\Omega=0.8$, 相对阻尼比为0.15, 齿面摩擦因数从0.21向0.29变化时系统由混沌运动经由拟周期运动被稳定吸引子所吸引后进入稳定运动轨道, 最终锁相于周期1稳定运动的全过程, 也就是齿轮系统在干摩擦情况下的混沌和分岔特性。图8(a)的 Poincaré 图

显示系统正处于混沌运动状态。图8(b)说明系统处于拟周期运动状态, 图8(c)~图8(e)说明系统在稳定吸引子的作用下随着齿面摩擦因数的增长而致其稳定吸引子的吸引域不断缩小, 最终将系统锁相于周期1的稳定运动而呈现的6种形态。

图8 不同齿面摩擦因数 μ 的 Poincaré 图

($\Omega=0.8, \xi=0.15$)

Fig. 8 Poincaré diagram under different tooth surface friction coefficient μ ($\Omega=0.8, \xi=0.15$)

3 结 论

1) 分析了模型在不同的转速、齿侧间隙、啮合阻尼和齿面摩擦因素下, 系统的可能存在的各种运动状态, 并定量地分析了运动状态的临界区域, 从而可以引入人为的控制, 避免系统产生多周期或者混沌运动下的冲击, 进而降低噪声, 提高操控舒适度并且提高齿轮传动系统的寿命。

2) 系统在不同的齿面摩擦条件下, 包括良好润滑和无润滑干摩擦运转下, 会随着转速的增加通过不同的途径进入混沌。在低齿面摩擦因数下, 会使系统随着转速的增加通过拟周期通道进入混沌, 随着润滑条件的降低即齿面摩擦因数的增加, 系统的混沌窗口将会裂变成2块, 同时激变成为

系统二次进入混沌的途径. 另外, 齿面摩擦因数的变化不会改变系统通过倒分岔回归周期1运动的途径, 且高齿面摩擦会使系统首次进入混沌的途径由拟周期通道转变为激变.

3) 在一定的转速、啮合阻尼和低齿面摩擦下, 随着齿侧间隙的增长, 系统进入混沌的途径主要为激变, 且系统的分岔和混沌区域主要集中在量纲一齿侧间隙小于3且大于7的区间, 且在小齿侧间隙阶段系统都是通过倒分岔回归周期1运动, 而在大齿侧间隙阶段通过激变进入混沌.

4) 在不同的啮合阻尼下, 且随着齿面摩擦因数的增长, 系统进入混沌的途径呈现出多样化的特性, 这跟文献[9]起到了相互印证的作用. 在低啮合阻尼下, 系统只在良好润滑和低齿面摩擦时会出现狭窄宽度的周期2运动窗口. 随着啮合阻尼的增加, 系统最终通过拟周期运动锁相为周期1的稳定运动. 在一定的啮合阻尼和干摩擦下, 可以观察到系统从混沌运动进入3个不变吸引圈, 然后进入周期3运动, 最终再次进入混沌运动, 这意味使齿轮系统在润滑条件良好的情况下工作, 对系统的动力学稳定性有着显著的影响.

参考文献:

- [1] ZHU Fumin, LI Wanli, Maropoulos P G. Tolerance analysis of a planetary gear reducer under cad circumstance[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2005, 18(3): 342-345.
- [2] SUN Dongye, QIN Datong, WANG Hongyan. Control strategy of a parallel hybrid car with a metal belt-planetary gear continuously variable transmission system[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2002, 15(3): 199-203.
- [3] 王三民, 沈允文, 董海军. 多间隙耦合非线性动力系统的分叉与混沌[J]. 西北工业大学学报, 2003, 21(2): 191-194.
WANG Sanmin, SHEN Yunwen, DONG Haijun. Bifurcation and chaos in a nonlinear dynamic with multiple clearances and time-varying stiffness[J]. Journal of North-western Polytechnic University, 2003, 21(2): 191-194. (in Chinese)
- [4] Vaishya M, Singh R. Strategies for modeling friction in gear dynamics[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2003, 125: 383-393.
- [5] Vaishya M, Singh R. Sliding friction-induced non-linearity and parametric effects in gear dynamics[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 248(4): 671-694.
- [6] Vaishya M, Singh R. Analysis of periodically varying gear mesh systems with coulomb friction using floquet theory[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 243(3): 525-545.
- [7] Velex P, Sainsot P. An analytical study of tooth friction excitations in spur and helical gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2002, 37(7): 641-648.
- [8] He S, Gunda R, Singh R. Effect of sliding friction on the dynamics of spur pair with realistic time-varying stiffness[J]. Journal of Sound and of Vibration, 2007, 301(3/4/5): 927-949.
- [9] 王三民, 沈允文, 董海军. 含摩擦和间隙直齿轮副的混沌与分叉研究[J]. 机械工程学报, 2002, 38(9): 8-11.
WANG Sanmin, SHEN Yunwen, DONG Haijun. Chaos and bifurcation analysis of a spur gear pair with combine friction and clearance[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2002, 38(9): 8-11. (in Chinese)
- [10] 张靖, 陈兵奎, 康传章, 等. 计及齿面摩擦的直齿轮动力学分析[J]. 振动与冲击, 2012, 31(21): 126-132.
ZHANG Jing, CHEN Binkui, KANG Chuanshang, et al. Dynamic analysis for spur gears considering friction effect[J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(21): 126-132. (in Chinese)
- [11] 卫一多, 刘凯, 马朝锋, 赵常青, 等. 摩擦对齿轮系统非线性振动及稳定性研究[J]. 机械科学与技术, 2012, 31(5): 760-765.
WEI Yiduo, LIU Kai, MA Chaofeng, ZHAO Changqing, et al. Effect of friction on the nonlinear vibration and stability of gear system[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2012, 31(5): 760-765. (in Chinese)
- [12] 盛冬平, 朱如鹏, 陆凤霞, 等. 多间隙弯扭耦合齿轮非线性振动的分岔特性研究[J]. 振动与冲击, 2014, 33(19): 116-122.
SHENG Dongping, ZHU Rupeng, LU Fengxia, et al. Bifurcation characteristics of bending-torsional coupled nonlinear vibration with multi-clearance[J]. Journal of Vibration and Shock, 2014, 33(19): 116-122. (in Chinese)
- [13] 朱自冰, 朱如鹏, 鲍和云. 两级星型齿轮传动系统非线性动力学研究[J]. 航空动力学报, 2007, 22(11): 1963-1970.
ZHU Zibing, ZHU Rupeng, BAO Heyun. Non-linear dynamic study of 2-stage star gear train[J]. Journal of Aerospace Power, 2007, 22(11): 1963-1970. (in Chinese)
- [14] 孙智民, 沈允文, 王三民, 等. 星形齿轮传动系统分岔与混沌的研究[J]. 机械工程学报, 2001, 37(12): 11-15.
SUN Zhiming, SHEN Yunwen, WANG Sanmin, et al. Bifurcation and chaos of star gear system[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2001, 37(12): 11-15. (in Chinese)
- [15] 杨宏斌, 高建平, 邓效忠, 等. 弧齿锥齿轮和准双曲面齿轮非线性动力学研究[J]. 航空动力学报, 2004, 19(1): 54-57.
YAN Hongbin, GAO Jianping, DENG Xiaozhong, et al. Nonlinear dynamics of spiral bevel gear and hypoid gear drives[J]. Journal of Aerospace Power, 2004, 19(1): 54-57. (in Chinese)
- [16] 李同杰, 朱如鹏, 鲍和云, 等. 行星齿轮非线性振动系统参数稳定域的计算方法[J]. 航空动力学报, 2012, 27(6): 1416-1423.

- LI Tongjie, ZHU Rupeng, BAO Heyun, et al. Method of stability region determination for planetary gear train's parameters based on nonlinear vibration model[J]. Journal of Aerospace Power, 2012, 27(6): 1416-1423. (in Chinese)
- [17] 魏大盛, 王延荣. 行星轮系动态特性分析[J]. 航空动力学报, 2003, 18(3): 450-453.
- WEI Dasheng, WANG Yanrong. The dynamic characteristics analysis of planet gear train[J]. Journal of Aerospace Power, 2003, 18(3): 450-453. (in Chinese)
- [18] 褚福磊, 冯冠平, 张正松. 碰摩转子系统中的阵发性与混沌现象[J]. 航空动力学报, 1996, 11(3): 261-264.
- CHU Fulei, FENG Guanping, ZHANG Zhengsong. Intermittent and chaotic phenomena in a rub impact rotor system[J]. Journal of Aerospace Power, 1996, 11(3): 261-264. (in Chinese)
- [19] 袁小阳, 朱均. 滑动轴承—转子系统 Hopf 分岔分析计算方法[J]. 航空动力学报, 1999, 14(2): 166-170.
- YUAN Xiaoyang, ZHU Jun. Hopf bifurcation of a rotor-sliding bearing system[J]. Journal of Aerospace Power, 1999, 14(2): 166-170. (in Chinese)
- [20] 李同杰, 朱如鹏, 鲍和云. 行星齿轮扭转非线性振动建模与分岔特性研究[J]. 机械工程学报, 2011, 47(21): 76-83.
- LI Tongjie, ZHU Rupeng, BAO Heyun. Nonlinear torsional vibration modeling and bifurcation characteristic study of a planetary gear train[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(21): 76-83. (in Chinese)
- [21] 李润方, 王建军. 齿轮系统动力学—振动、冲击、噪声[M]. 北京: 科学出版社, 1997.